# 第26講　空間図形とベクトル

## §1 ▶ 位置ベクトル

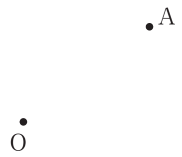
### 要点整理 と 公式

#### 要点1 位置ベクトル

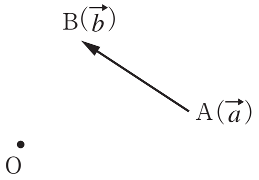
平面同様，空間においても，1 点 O を固定し，この点を基準とすると，点 A の位置は

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

で表すことができる。このようなベクトル $\vec{a}$ を，点 O に関する点 A の「位置ベクトル」といい，位置ベクトルが $\vec{a}$ である点を「 A$(\vec{a})$ 」と表す。




また，2 点 A $(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ と表される。



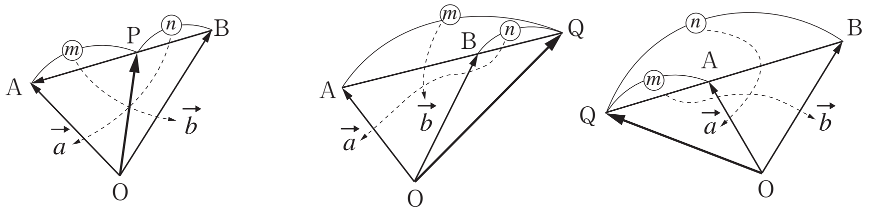

#### 要点2 分点の位置ベクトル

平面同様，次のことが成り立つ。

**■ 内分点，外分点の位置ベクトル**

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \qquad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$




$m > n$　　　$m < n$

線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$m = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

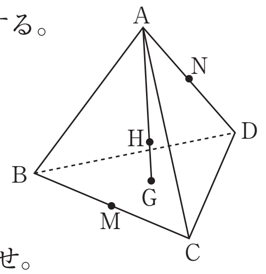
また，空間の 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**1**

4 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，辺 BC の中点をM$(\vec{m})$，辺 AD の中点を N$(\vec{n})$ とする。




(1)　線分 MN の中点 P を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2)　△BCD の重心を G$(\vec{g})$ とし，線分 AG を 3：1 に内分する点を H$(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

## Point Pickup

**内分点，外分点，三角形の重心を表す位置ベクトル**

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ に対し

線分 AB を $m：n$ に

内分する点 P の位置ベクトルは　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

外分する点 Q の位置ベクトルは　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

△ABC の重心 G の位置ベクトルは　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

## { 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# §2 ▶ 一直線上にある点

## 要点整理 と 公式

### 要点❸ 一直線上にある3点

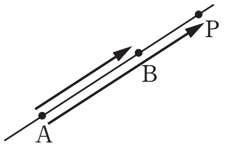
空間においても，平面の場合と同様に次のことが成り立つ。

■ **一直線上の点**

3 点 A，B，P が一直線上にある。

⟺　直線 AB 上に点 P がある。

⟺　$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 $k$ が存在する。




（ex）右の図の直方体 ABCD − EFGH において，

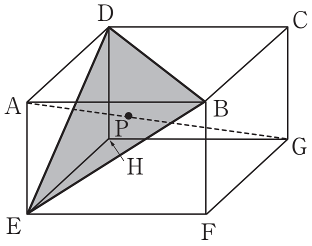
△BDE の重心 P は対角線 AG 上にあることを示す。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$　とおくと，

$\overrightarrow{AG} =$

また，$\overrightarrow{AP} =$

よって，$\overrightarrow{AG} =$　　$\overrightarrow{AP}$ より，点 P は対角線 AG 上にある。




また，同じ平面上にある 4 点に関して，次のことが成り立つ。

■ **同一平面上の点**

一直線上にない 3 点 A，B，C が定める平面 ABC について，

点 P が平面 ABC 上にある。

⟺　$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 $s$，$t$ が存在する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

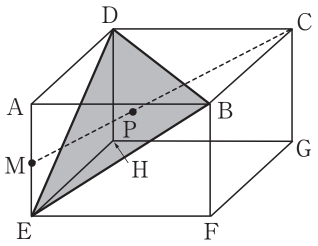
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2**

直方体 ABCD − EFGH において，辺 AE の中点を M，△BDE の重心を P とする。$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　C，P，M は一直線上にあることを証明せよ。




## Point Pickup

### 一直線上の点

3 点 A，B，P が一直線上にある。

⟺　$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 $k$ が存在する。

### ベクトルの分解

あるベクトルの始点を別の点に変えたいとき，差の性質を用いて

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」するとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# §3 ▶ 座標空間における線分の長さと分点の座標

## 要点整理 と 公式

### 要点4 座標空間における 2 点間の距離

座標空間上の 2 点 A$(a_1, a_2, a_3)$, B$(b_1, b_2, b_3)$について,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(b_1, b_2, b_3)-(a_1, a_2, a_3)$

$=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

以上より，次のことが成り立つ。

**■ 2 点間の距離**

2 点 A$(a_1, a_2, a_3)$, B$(b_1, b_2, b_3)$について

$$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

### 要点5 座標空間における内分点，外分点の座標

座標空間上の 2 点A$(a_1, a_2, a_3)$, B$(b_1, b_2, b_3)$について，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，$m:n$ に外分する点を Q とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n},\qquad \overrightarrow{OQ}=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$$

である。よって，次のことが成り立つ。

**■ 内分点，外分点の座標**

2 点 A$(a_1, a_2, a_3)$, B$(b_1, b_2, b_3)$を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n}, \dfrac{na_2+mb_2}{m+n}, \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n}, \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n}, \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（ex）2点 A( 3, 1, 4 )，B( 4, 5, 1 ) について，線分 AB を

2：1に内分する点の座標は $\left(\dfrac{1\times3+2\times4}{2+1},\ \dfrac{1\times1+2\times5}{2+1},\ \dfrac{1\times\quad+2\times\quad}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3},\quad\right)$

2：1に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-1\times3+2\times4}{2-1},\ \dfrac{-1\times1+2\times5}{2-1},\ \dfrac{-1\times4+2\times1}{2-1}\right)$

$=(5,\ 9,\ -2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**3**

2点A( 1, 2, 3 ), B( −1, 3, 2 )について，次のものを求めよ。

(1)　線分ABの長さ

(2)　線分ABを2：3に内分する点の座標

(3)　線分ABを2：3に外分する点の座標

## Point Pickup

### 2点間の距離と内分点，外分点の座標

2点A ( $a_1$, $a_2$, $a_3$ ), B ( $b_1$, $b_2$, $b_3$ )について

$$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

線分ABを

$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\ \dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\ \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

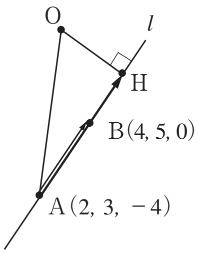
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# §4 ▶ 空間図形への内積の応用

## 要点整理 と 公式

### 要点 6 空間図形への内積の応用

2 点 A( 2, 3, −4 ), B( 4, 5, 0 )を通る直線 $l$ に,
原点 O から垂線 OH を下ろしたとき,
点 H の座標を求める。




点 H は直線 AB 上にあるので

$$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$$

を満たす実数 $t$ が存在する。

よって,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

表される。ここで,

$\overrightarrow{OA} = (\quad,\quad,\quad)$, $\overrightarrow{AB} = (\quad,\quad,\quad)$

より

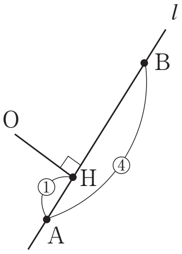
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (2,\ 3,\ -4) + t(2,\ 2,\ 4) = (2t+2,\ 2t+3,\ 4t-4)$

と表される。

ここで, OH ⊥ AB より, $\overrightarrow{OH}\quad\overrightarrow{AB} =$

よって, $(2t+2)\times 2 + (2t+3)\times 2 + (4t-4)\times 4 = 0$

$$t = \frac{1}{4}$$




したがって, $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -3\right)$

ゆえに, 点 H の座標は $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -3\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**4**

2 点 A( 3, 5, 2 )，B( 0, 2, 5 ) を通る直線に，原点 O から垂線 OH を下ろしたとき，点 H の座標を求めよ。

## Point Pickup

### 一直線上の点

3 点 A，B，H が一直線上にある。

$\iff$　$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$　を満たす実数 $k$ が存在する。

### 垂直と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a} = ( a_1, a_2, a_3 )$，$\vec{b} = ( b_1, b_2, b_3 )$ のとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第26講　確認テスト

**1**　4 点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺 AB の中点を K$(\vec{k})$，辺 CD の中点を L$(\vec{l})$ とする。

$\vec{k}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{ア}}$，　$\vec{l}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{\boxed{イ}}$ である。

**2**　直方体 ABCD － EFGH において，△BDE の重心を P とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$　とおくと，$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　である。

また，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{\boxed{ウ}}$ である。よって，$\overrightarrow{AG}=\boxed{エ}\,\overrightarrow{AP}$ より，

点 P は対角線 AG 上にある。

**3**　2 点 A( −1, 4, 5 ), B ( 3, 2, 3 )に関して，AB = $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

また，線分 AB を 1 : 2 に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{キ}}{3},\ \dfrac{\boxed{クケ}}{3},\ \dfrac{\boxed{コサ}}{3}\right)$

である。

**4**　3 点 A( 0, 1, 4 ), B( 4, 5, 0 ), P ( 4$t$, 4$t$ + 1, − 4$t$ + 4 )について，

$\overrightarrow{OP}=(4t,\ 4t+1,\ -4t+4)$, $\overrightarrow{AB}=(\boxed{シ},\ \boxed{ス},\ -\boxed{セ})$ である。

よって，OP⊥AB のとき，P の座標は ( $\boxed{ソ}$, $\boxed{タ}$, $\boxed{チ}$ )である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第26講　空間図形とベクトル

**1**

(1) $\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{n}=\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

よって, $\vec{p}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

(2) $\vec{g}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

よって, $\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}{4}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

**2**

(1) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって, $\overrightarrow{CM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CP}$ より, C, P, M は一直線上にある。

**3**

(1) $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

(2) $\left(\dfrac{3\times1+2\times(-1)}{2+3},\ \dfrac{3\times2+2\times3}{2+3},\ \dfrac{3\times3+2\times2}{2+3}\right)$ よって $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(3) $\left(\dfrac{3\times1+(-2)\times(-1)}{-2+3},\ \dfrac{3\times2+(-2)\times3}{-2+3},\ \dfrac{3\times3+(-2)\times2}{-2+3}\right)$ よって$(5,\ 0,\ 5)$

**4**

点 H は直線 AB 上にあるので

$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$

を満たす実数 $t$ が存在する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

と表される。ここで，

$\overrightarrow{OA} = (3,\ 5,\ 2)$，$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -3,\ 3)$

より

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (3,\ 5,\ 2) + t(-3,\ -3,\ 3) = (-3t+3,\ -3t+5,\ 3t+2)$

と表される。

ここで，OH ⊥ AB より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

よって，$(-3t+3)\times(-3) + (-3t+5)\times(-3) + (3t+2)\times 3 = 0$

$$t = \frac{2}{3}$$

したがって，$\overrightarrow{OH} = (1,\ 3,\ 4)$

ゆえに，点 H の座標は　(1，3，4)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第26講　確認テスト

**1**　4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺 AB の中点を K($\vec{k}$)，辺 CD の中点を L($\vec{l}$) とする。

$\vec{k} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{\boxed{ア}}$，　$\vec{l} = \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{\boxed{イ}}$ である。

**2**　直方体 ABCD − EFGH において，△BDE の重心を P とする。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$　とおくと，$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$　である。

また，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{\boxed{ウ}}$ である。よって，$\overrightarrow{AG} = \boxed{エ}\,\overrightarrow{AP}$ より，

点 P は対角線 AG 上にある。

**3**　2 点 A( −1，4，5 )，B ( 3，2，3 )に関して，AB = $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

また，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{キ}}{3},\ \dfrac{\boxed{クケ}}{3},\ \dfrac{\boxed{コサ}}{3}\right)$

である。

**4**　3 点 A( 0，1，4 )，B( 4，5，0 )，P ( 4$t$，4$t$ + 1，− 4$t$ + 4 )について，

$\overrightarrow{OP}$ = ( 4$t$，4$t$ + 1，− 4$t$ + 4 )，$\overrightarrow{AB}$ = ( $\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，−$\boxed{セ}$ ) である。

よって，OP⊥AB のとき，P の座標は ( $\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$ )である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**{ 解答 }**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ア　2 | イ　2 | | | | | |
| **2** | ウ　3 | エ　3 | | | | | |
| **3** | オ　2 | カ　6 | キ　1 | ク　1 | ケ　0 | コ　1 | サ　3 |
| **4** | シ　4 | ス　4 | セ　4 | ソ　1 | タ　2 | チ　3 | |

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。